数理解析研究所講究録
291巻 1977年 73-77

Bifurcation について

広大 理　井上 淳

最近 Bifurcation 関係の出版物が急激に増加しているのですが，必ずしも当地では その理論の raison d'être が知られているとは言い難いようなので，その解説を試みるものです．

さて，我々の出会う多くの非線型の方程式は，多くの場合，いくつかの parameter を含んでいます．一般的に

$$(1) \qquad u_t = F(\nu; t, u)$$

の形をしているものと考えられます．例えば，

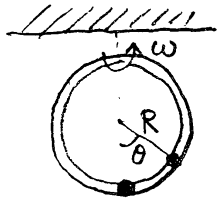
<u>Ex 1</u> (Navier-Stokes equation)

$$(2) \qquad \begin{cases} u_t - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f \\ \nabla\cdot u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = b \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

この式の物理的意味は，適当な教科書にゆずることにして，

$R = \frac{1}{\nu}$ は Reynolds 数と呼ばれる parameter.

<u>Ex.2</u> (Calabi の例)



左図のように天井からフラフープをつるし、中にパチンコ玉を入れ角速度ωで回わします。gを重力として、Newton の法則に従ってパチンコ玉の動きを表わすと

(3) $\ddot{\theta} = \sin\theta\left(\omega^2\cos\theta - \frac{g}{R}\right)$ $\theta = \theta(t)$, $\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta$.

ここではωを parameter とみます。

他にいくらでも例はありますが、差し当りこれだけにしましょう。尚、parameter がいくつか入っている場合もあり、それも又面白い問題を提供してくれます。([2])

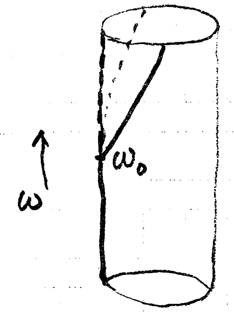
以後簡単の為、$F(\nu; t, u) = F(\nu; u)$ となっているとしましょう。

今、(ν_0, u_0) が $F(\nu_0, u_0) = 0$ をみたしているとき、u_0 を(1)の<u>平衡解</u>(stationary solution)といいます。さて、この平衡解 u_0 を少しゆすってみましょう。すなわち $u(t) = u_0 + v(t)$ として(1)式に代入します。

(4) $v_t = F(\nu_0; u_0 + v(t))$, $v(0) = \text{given}$

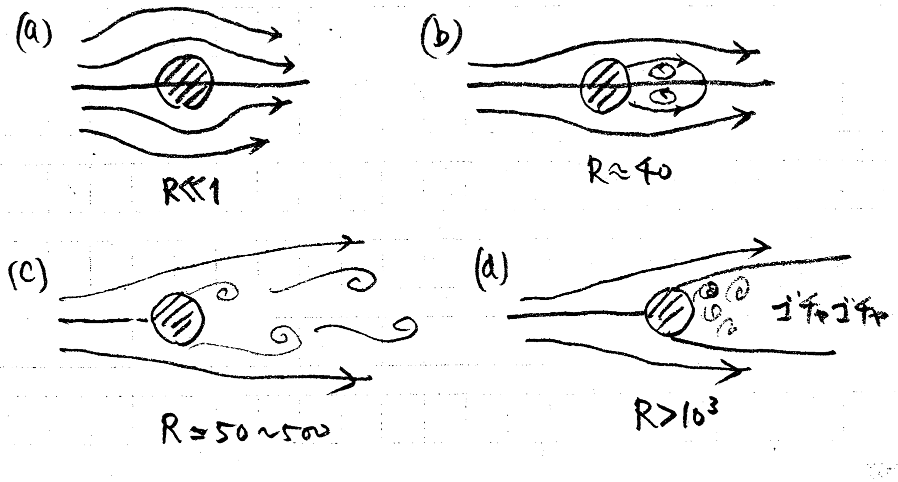
このとき、$v(0)$が小さければ、$v(t)$も小さく、かつその影響が時間と共に小さくなることが望ましいわけです。これを<u>安定</u>(stable)ということにします。

例2の場合でω を大きくしていくと下図のようになります。



$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}}$. (2) の stationary sol. は $\theta=0$ と $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$ です。 $\omega<\omega_0$ のときはパチンコ玉はフラフープの下端にして $\omega\geq\omega_0$ となると、一般に段々上にあがってきます。すなわち、$\omega=\omega_0$ では stationary sol. は2つあって、一つは安定、もう片方は不安定になります。このように parameter がある点(臨界点)を越えると解のあり方が変わるとき、Bifurcation がおこるといいます。

<u>Ex 3</u> (円柱のまわりの一様流) 一様な水の流れの中に円柱を固定して R を変化させるとしましょう。(実際には、流れを速くする)。今井[7] によれば、大体以下のようになります。



上のようにして乱流が現われるのですが，これに対し，Hopf と Landau は，「乱流は安定性と技合れがくり返して生ずる」と予想しました．すなわち (a) では一様流は安定な平衡解，それが R が大きくなると (b) となって違う安定な平衡解，又 R が大きくなると (c) となって，今度は時間的に周期的な安定な解ができ，それをくり返し，今度は周期が2つのもの，3つのものとなって (d) に到る．

最近，ある stationary sol. が bifurcation point をすぎると periodic sol. となるという現象，(Hopf Bifurcation) が説明され (Ruelle-Takens [5]，Marsden-McCraken [4])，又，periodic sol. から quasi-periodic sol がでてくる様子が少しずつ分かってきたようです．筆者は不勉強にして具体的問題についてどこ迄わかっているのか定かではありませんが，極く最近でた Joseph [3] の力作には色々と説明してあるようです．

Ex. 4. (Yamabe の問題) 有名な山辺の問題とは，M を n 次元 Riemann manifold として，(η, φ) $\eta \in \mathbb{R}$ $\varphi > 0$ on M で

(5) $4\frac{n-1}{n-2}\Delta\varphi + R\varphi = \eta\varphi^{\frac{n+2}{n-2}}$ on M

なるものをみつけることにあります．R は given．上のいみで，$\varphi = 0$ がいつ bifurcate するかと考えることができます．これが，この Bifurcation theory をこの symposium で紹介して

みたかった一つの動機です．

まだいくらでも考えることはあるようですが，今回はこれで終わらせていただきます．

文献

[1] T. Aubin : Equations différentielles non linéaires et Problème de Yamabe concernant la courbure scalaire

[2] C.N. Chow, J.K. Hale & J. Mallet-Paret : Applications of Generic Bifurcation I. II. Arch Rat. Mech Anal 59 ('75) 159–188.

[3] D.D. Joseph : Stability of fluid motions I. Springer ('76)

[4] J.E. Marsden & M. McCraken : The Hopf Bifurcation and its applications. Springer, Appl. Math Sci #19 ('76)

[5] D. Ruelle & F. Takens : On the nature of turbulence Comm. Math Phy. 20 ('71) 167–192

[6] D.H. Sattinger : Topics in stability and bifurcation theory Springer Lec. notes 309 ('73)

[7] 今井功 : 流体力学（前編） 裳華房.